213 - Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Plan allègrement pompé sur « Objectif agrégation », que je trouve très bien fait pour l'analyse hilbertienne.

I) **<u>Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert</u>** [BMP] + [Analyse L3] + [Bré] + [Pom]

1) <u>Espaces préhilbertiens</u> [BMP]

Déf : espace préhilbertien [BMP 92] *(parler des différences entre corps de base réel ou complexe : formules de polarisation etc.)*

Ppté : Cauchy Schwarz [BMP 93] *(considérer N(x+ly), développer, dire que le delta du polynôme en lambda est négatif ou nul, et c'est bon)*

Ppté : une norme dérive d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme [BMP 93] [Gou1 248] *(calculatoire)*

Ppté : Pythagore

2) <u>Espaces de Hilbert</u> [Analyse L3]

Déf : espace de Hilbert. Réel DF : euclidien. Complexe DF : hermitien [Analyse L3 324] *(attention : en fait c'est pas un produit scalaire qu'il y a sur H si H est complexe, c'est un produit hermitien !)*

Exemple trivial : espace préhilbertien de DF. R^n, C^n [Analyse L3 324]

C-ex : suites s'annulant à partir d'un certain rang [Analyse L3 325]

Exemple : l^2 (on y reviendra) [Analyse L3 325] *(on prend une suite de Cauchy (x(n)) de l^2. Alors la suite des k-èmes composantes (x(n)_k)_n est de Cauchy dans R donc converge vers x_k. On appelle x=(x_k). Faut mq x est dans l^2, ce qui est un peu galère. Faut ensuite mq (x(n)) cv vers x, en faisant tendre soit p soit q dans l'ineg de Cauchy).*

Exemple : L^2 pour n'importe quel espace mesuré [Analyse L3 325] [Bré 57] *(remarque : on aurait pu déduire le résultat sur l^2 de celui là avec la mesure de comptage)*

Prop : sev fermé d'un Hilbert => Hilbert [Pom 47]

II) **<u>Projection sur un convexe et dualité</u>** [BMP] + [Bré]

1) <u>Projection</u> [BMP]

Th : C un convexe fermé non vide de H Hilbert. alors pour x dans H, il existe un unique élément de C qui minimise la distance d(x,C. Caract angulaire, dessin [BMP 95] *(l'inf existe donc on regarde (yn) une suite minimisante d'éléments de C. Grâce à l'identité du parallélogramme on mq c'est une suite de Cauchy. A un moment on utilise la convexité pour dire que la demi-somme appartient à C. La suite converge dans C car C complet)*

Rq : en dimension finie, on peut projeter sur tous les fermés [BMP 96] *(les fermés bornées sont compacts donc il existe un projeté ; on perd la caractérisation angulaire et l'unicité)*

Prop : la projection sur un convexe est 1-Lip (donc continue) [BMP 96]

2) <u>Projection sur un sev</u> [BMP]

Th : si F est un sev fermé de H, alors H est somme directe de F et F orthogonal. De plus, la proj sur un sev fermé est orthogonale |BMP 98]

Appl : un sev F est dense dans H ssi l'orthogonal de F est nul. En effet, dans le cas général, H est somme directe de adh(vect(A)) et de A orthogonal. Pour un sev ça donne H est SD de adh(F) et de F orth [BMP 100]

Prop : formule pour la projection sur un sev de DF [BMP 99]

Ex : espérance conditionnelle [BMP 100]

3) Dualité [BMP] + [Bré]

Th : (Riesz) Il y a une isométrie surjective entre H et son dual [BMP 103] *(le th de projection donne le fait que si F est un sev fermé, alors E est somme de F et F orthogonal, ce qui sert dans le th de Riesz)*

Csq : Les Hilbert sont réflexifs *(http://people.math.jussieu.fr/~maurey/ts012/poly/mths_45.pdf, en montrant que l'isométrie canonique est surjective)*

III) Bases hilbertiennes

1) Bases hilbertiennes [BMP]

Def base hilbertienne [BMP 107]

Prop : Gram Schmidt [BMP 108]

Ex : base de l^2

Th : existence de base hilbertienne. La base est dénombrable ssi H est séparable. Dans le cas général on utilise Zorn. [BMP 108] [Bré]

Rq : on sait aussi que tout ev (même de dim infini) à une base algébrique. Les notions de base alg et hilb coexistent donc mais sont bien différentes. Voir paragraphe [BMP 108]

Ex : Les L^p sont séparables (p fini), R^n, C^n, l^2…

Th : équivalences base hilb [BMP 109]

Prop : une isométrie conserve les bases hilb [???]

2) Séries de Fourier [ZQ]

Th : e^inx est une base o.n. de L^2(R/2PiZ) (csq de Fejer)

Csq : les fonctions de L^2 sont sommes de leur série de Fourier

3) Polynômes orthogonaux [BMP] + [Dem]

Définition des espaces L^2(I,ro) [BMP 110]

Rq : L^2(I,ro) est complet

Def : suite de polynômes orthogonaux [BMP 110]

Prop : il existe une unique suite de polynômes orthogonaux [Dem 51]

Ex : Hermite, puis Legendre [Dem 52]

Prop : meilleure approximation

Th : sous certaines conditions sur la fonction de poids, les polynômes orth forment une base hilb de L^2(I,ro) [BMP 140] (utilise les fonctions holomorphes).

Cor : si I est borné, le th s'applique.

Th : on en déduit une base o.n de L^2(R) gâce aux polynômes de Hermite [BMP 112]

(En plus : les polynômes orthogonaux sont scindés à racines simples, et servent pour le calcul numérique (méthode de Gauss). Voir Demailly)

4) Espace de Bergman [B & M]

Définition

Prop : $A^2(U)$ est un Hilbert

Prop : base hilbertienne de $A^2(D)$ (savoir qu'on peut alors trouver une base hilb de $A^2(U)$ grâce au théorème de représentation conforme de Riemann)

Développements :
1 - Espace de Bergman [Bayen & Margaria – Espaces de Hilbert et opérateurs] (***)
2 - Polynômes orthogonaux (base hilbertienne + appl à L^2) [Dem] + [BMP] (***)
3 - Sous espaces fermés de L^p [Rud Analyse fct 111] (* ou **)

Pas mis :
Convergence faible dans les Hilbert
Adjoint (partie dualité)

Bibliographie :
[BMP]
[B&M] Bayen & Margaria
[Gou1] Gourdon – Algèbre
[Bré]
[Dem] Demailly
[ZQ]

Rapport Jury : *Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Par contre, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Il est important d'avoir réfléchi en termes de base algébrique et de base hilbertienne et de présenter des applications substantielles. Cette leçon permet de parler de polynômes orthogonaux et de donner des exemples de bases hilbertiennes dans des espaces L^2, mais les candidats ont bien du mal à en déduire des bases hilbertiennes de $L^2(R)$.*